

## ΑΓΜΑ (MEM-100) – Φυλλάδιο Ασκήσεων 2

Άσκηση 1. Γράψτε σε τριγωνομετρική μορφή τους μιγαδικούς

$$1 + \sqrt{3}i, \quad 1 - \sqrt{3}i, \quad -1 - \sqrt{3}i, \quad -1 + \sqrt{3}i, \quad 4, \quad -4, \\ 5\left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}\right) \cdot 2\left(\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8}\right), \quad \frac{25(\cos 160^\circ + i \sin 160^\circ)}{5(\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ)}$$

Άσκηση 2. Υπολογίστε τις δυνάμεις

$$\left[2(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)\right]^3, \quad \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2000}, \quad \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-6}.$$

Άσκηση 3. Υπολογίστε την παράσταση  $(\sqrt{3} + i)^n + (\sqrt{3} - i)^n$ , όπου  $n \in \mathbb{N}$ .

Άσκηση 4. Δείξτε ότι  $\text{Arg}\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right) = \frac{\pi}{12}$  και να βρείτε τα  $\sin \frac{\pi}{12}$ ,  $\cos \frac{\pi}{12}$ .

Άσκηση 5. Να βρείτε το μέτρο και το πρωτεύον όρισμα του μιγαδικού  $z \neq 0$ , αν  $z^2 = \bar{z}$ .

Άσκηση 6. Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τη διαίρεση ενός μιγαδικού  $z$  με  $i$ .

Άσκηση 7. (α) Να δείξετε ότι  $(1+i)^n = (1-i)^n$  συνεπάγεται  $n = 4k$ .

(β) Αν  $f(n) = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$ , τότε να δείξετε ότι  $f(n+4) + f(n) = 0$ .

Άσκηση 8. Να δείξετε ότι  $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ , αν και μόνο αν  $\text{Arg}(z_1) = \text{Arg}(z_2)$ .

Άσκηση 9. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών  $z$ , για τους οποίους ισχύει

$$(a) \text{Arg}(z - i) = \frac{\pi}{6}, \quad (b) \text{Arg}(z + 1) = \frac{\pi}{4}, \quad (c) \text{Arg}\left(\frac{z}{z - i}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Άσκηση 10. Μεταξύ όλων των μιγαδικών  $z$  που ικανοποιούν  $|z + 2 - 5i| \leq 2$ , να βρείτε εκείνον που έχει  
(α) το μικρότερο πρωτεύον όρισμα, (β) το μεγαλύτερο πρωτεύον όρισμα.

Άσκηση 11. Αν  $z = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} + i\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$  και  $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{3}$ , να βρείτε τον πραγματικό αριθμό  $\lambda$ .

Άσκηση 12. Δίνεται το τριώνυμο  $f(x) = x^2 + 2|z_1 - z_2|x + (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)$ , όπου  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ . Να δείξετε ότι  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Άσκηση 13. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$(a) z^3 = -i, \quad (b) z^4 = 16\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right), \quad (c) z^5 = 243\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right), \quad (d) z^6 = -64.$$

Άσκηση 14. Να λύσετε τις εξισώσεις (α)  $z^3 + 3z^2 + 4z = 8$ , (β)  $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$ .

Άσκηση 15. Να λύσετε την εξίσωση  $3z^3 - 10z^2 + 7z + 10 = 0$ , αν γνωρίζετε ότι το  $2 + i$  είναι ρίζα.

Άσκηση 16. Αν ο  $w$  είναι κυβική ρίζα της μονάδας, με  $w \neq 1$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης  $(1 - w + w^2)(1 + w - w^2)$ .

Άσκηση 17. Να λύσετε την εξίσωση  $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 = 0$ .

Άσκηση 18. Να λύσετε την εξίσωση  $z^3 + 3z^2 + 3z + 9 = 0$  και να δείξετε ότι οι ρίζες αντιστοιχούν σε κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.